التمرين الأول

ليكن a و b عددين مختلفين من $\mathbb{R}^*$. نعتبر المتتاليتين $(V_n)_n$ و $(U_n)_n$ المعرفتين بما يلي :

$$\begin{cases} U_0 = a \quad ; \quad V_0 = b \\ U_{n+1} = \dfrac{aU_n + bV_n}{a-b} \\ V_{n+1} = \dfrac{bU_n + aV_n}{a-b} \end{cases}$$ ونضع $T_n = U_n - V_n$ و $S_n = U_n + V_n$

1) بين أن $(T_n)_n$ متتالية ثابتة و أن $(S_n)_n$ هندسية محددا أساسها

2) حدد الحد العام لكل من المتتاليتين $(V_n)_n$ و $(U_n)_n$

التمرين الثاني

نعتبر المتتالية $(x_n)_n$ المعرفة بما يلي : $x_0 = 1$ و $x_{+1} = \sqrt[3]{1+\dfrac{1}{2}x_n^3}$

1) بين أن $0 < x_n < 2$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2) بين أن المتتالية $(x_n)_n$ تزايدية و استنتج أنها متقاربة

3) نضع $U_n = x_n^3 - 2$ بين أن $(U_n)_n$ متتالية هندسية و حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

التمرين الثالث

نضع $U_n = \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{k=n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ $(\forall n \geq 1)$

1) بين أن $\dfrac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$ $(\forall k \geq 1)$

2) أ- حدد تأطيرا للمتتالية $(U_n)_{n\geq1}$

ب- استنتج أن $(U_n)_{n\geq1}$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الرابع

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ المعرفة بما يلي : $U_0 = \dfrac{1}{4}$ و $U_{n+1} = \dfrac{1-\sqrt{1-U_n}}{2}$

1) بين أن $U_n = \sin^2\left(\dfrac{\pi}{6.2^n}\right)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2) أ- بين أن : $\dfrac{2}{\pi}t \leq \sin t \leq t$ $\left(\forall t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$

ب- استنتج أن $\sqrt[n]{\dfrac{1}{9.4^n}} \leq \sqrt[n]{U_n} \leq \sqrt[n]{\dfrac{\pi^2}{4^n}}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ و حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n}$

التمرين الخامس

نضع $u_n = \sqrt[n]{n} - 1$ لكل عدد طبيعي n بحيث $n \geq 2$

1) بين أن $u_n \geq 0$ $(\forall n \geq 2)$

2) بين أن $n \geq C_n^2 (u_n)^2$ $(\forall n \geq 2)$ و استنتج أن $u_n \leq \sqrt{\dfrac{2}{n-1}}$ $(\forall n \geq 2)$

3) بين أن $(u_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين السادس

لتكن $(U_n)_{n>0}$ متتالية حسابية بحيث : $U_1 + U_2 + \dots\dots + U_n = n^2 p$ و $U_1 + U_2 + \dots\dots + U_k = k^2 p$

n , p , k أعداد طبيعية غير منعدمة و $k \neq n$

1) بين أن $U_n - U_k = 2p(n-k)$

2) حدد أساس المتتالية $(U_n)_{n>0}$ و حدها الأول

3) استنتج أن $U_1+U_2+.......+U_p=p^3$

التمرين السابع

ليكن n عددا من $\mathbb{N}^*$ و نعتبر الدالة f_n المعرفة على $]0,1[$ بما يلي : $f_n(x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{\pi}{2nx}$

1) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n

2) بين أن المتتالية $(\alpha_n)_n$ تناقصية و استنتج أنها متقاربة

3) بين أن $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=0$

4) أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n\sqrt{n}$

التمرين الثامن

1) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $f(x)=x^3+2x-1$

أ- بين أن f تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو مجال يتم تحديده

ب- استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α و أن $\alpha<1$

2) ليكن n عددا من $\mathbb{N}^*$

أ- بين أن المعادلة $f(x)=\frac{1}{n}$ تقبل حلا وحيدا نرمزله بالرمز V_n

ب- بين أن $\alpha\leq V_n\leq 1$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$

ج- أدرس رتابة المتتالية $(V_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

3) أثبث أن $\lim\limits_{n\to+\infty}V_n=\alpha$

التمرين التاسع

ليكن n من $\mathbb{N}^*$ و نضع $f_n(x)=x^3+x^2+nx-2$ لكل x من المجال $[0,+\infty[$

1) بين أن المعادلة $f_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_n و أن $0<x_n<1$

2) تحقق أن $f_{n+1}(x_n)=x_n$ و استنتج أن المتتالية $(x_n)_n$ تناقصية

3) بين أن $(x_n)_n$ متقاربة و أن $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$

التمرين العاشر

ليكن a عدد حقيقي و نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0=a-\frac{1}{2}$ و $U_{n+1}=U_n^2+(1-2a)U_n+a^2$

و نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=x^2+(1-2a)x+a^2$

1) أ- تحقق أن $f(x)-a=(x-a)(x-a+1)$

ب- استنتج أن $f([a-1,1])\subset[a-1,a]$

2) بين أن $f(x)\geq x$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

3) أ- بين أن $a-1<U_n<a$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$ و استنتج انها متقاربة

ج- حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n$

التمرين الحادي عشر

1) $u_n=\left(\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)-2\sqrt{n+1}$ و $v_n=\left(\sum_{k=1}^{k=n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)-2\sqrt{n}$ محاذيتان

2) $u_n=\prod_{k=1}^{k=n}\cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$ و $v_n=u_n\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ محاذيتان